



Að móta námsumhverfi í stærðfræði þar sem skapandi hugsun er í fyrirrúmi: Kristjana Skúladóttir stærðfræðikennari

Höfundar: Jónína Vala Kristinsdóttir og Ólöf Björg Steinþórsdóttir

► Abstract

► Um höfunda

► About the authors

► Heimildir

Mynd ¹

Kristjana Skúladóttir



Áhersla á hugsun barna um stærðfræði og hvernig þau takast á við stærðfræðinámið sitt hefur fengið aukið vægi í kennaramenntun og námskrá undanfarna áratugi. Tilgangurinn með þessari grein er að gefa innsýn í starf stærðfræðikennara sem hefur haft það að markmiði að gefa nemendum sínum tækifæri til að beita skapandi hugsun við stærðfræðinámið. Kristjana Skúladóttir hefur kennt á yngsta stigi og miðstigi grunnskóla í rúma þrjá áratugi og lagt sig eftir að kynna sér rannsóknir á hugsun barna um stærðfræði og kennsluhætti sem styðja þau við að beita skapandi hugsun. Greint er frá rannsóknarverkefnum sem hún hefur kynnt sér og lýst hvernig hún hefur nýtt sér þekkingu sína á þeim í kennslu sinni og við að styðja aðra kennara til að þróa kennsluhætti sína í stærðfræði. Við rannsóknina var beitt frásagnarrýni og stuðst við gögn frá ferli hennar sem kennara, viðtöl, vettvangsnótur og gögn frá nemendum.

Niðurstöður rannsókna á kennsluháttum Kristjönu leiða í ljós að hún hefur átt í öflugum samstarfi við samkennara sína um að þróa kennsluhætti í stærðfræði þar sem skapandi hugsun, rökræður og áhersla á hlutdeild nemenda og ábyrgð á eigin námi er í fyrirrúmi.

Efnisorð: Stærðfræðinámið, leiðsagnarnámið, námsumhverfi, grunnskólakennsla

Inngangur

Kristjana Skúladóttir ólst upp í Skerjafirði og gekk í Melaskóla, síðar Hagaskóla og Menntaskólann í Reykjavík. Hún lauk B.Ed.-prófi frá Kennaraháskóla Íslands árið 1979 með áherslu á stærðfræði og náttúrufræði og diplóma í kennslufræði frá HÍ 2009 með áherslu á stærðfræði. Kristjana kenndi tvö ár í Breiðholtsskóla að loknu B.Ed.-námi, bjó svo fimm ár í Danmörku þar sem hún var móðurmálskennari íslenskra barna og við heimkomuna kenndi hún eitt ár í Seljaskóla. Haustið 1987 var hún ráðin kennari við Melaskóla og var umsjónarkennari á miðstigi frá 1999 til 2022. Stærðfræðikennsla var henni hugleikin allt frá upphafi kennsluferils hennar. Sumarið 1995 sótti hún vikulangt starfsþróunarnámskeið um stærðfræðikennslu byggða á skilningi barna (SKSB) sem hafði afgerandi áhrif á hvernig kennsluhættir hennar í stærðfræði þróuðust síðan. Hún hefur verið öflugur þátttakandi í samstarfi kennara um stærðfræðinámið og -kennslu og tók þátt í þróunarverkefnum um kennsluhætti í stærðfræði í samstarfi við KHÍ. Þá tók hún þátt í rannsóknarverkefni doktorsnema um hlutfallaskilning barna vorið 2000 sem einnig hafði áhrif á þróun kennsluhátta hennar. Hún hefur haldið mörg námskeið og fyrirlestra um stærðfræðikennslu á miðstigi. Kristjana hefur verið félagi í Fleti, samtökum stærðfræðikennara, frá stofnun þeirra 1993, sat í ritstjórn mál gagns félagsins, *Flatarmála*, 1997–1999 og hefur setið í stjórn félagsins frá 2019.

¹ Mynd 1 kemur úr safni Kristjönu Skúladóttur.

Fyrst verður greint frá rannsóknarferlinu og því næst fjallað um fræðilegan bakgrunn þeirra rannsóknar- og þróunarverkefna sem Kristjana hefur tekið þátt í. Þá verður fjallað um stærðfræðikennslu Kristjönu og þátttöku hennar í þróunarstarfi um stærðfræðináms- og -kennslu. Í lokin er samantekt um starf Kristjönu þar sem greind eru þau áhrif sem stöðug leit hennar að þekkingu á stærðfræðinámi barna og öflugu námsumhverfi hafði á kennsluhætti hennar í stærðfræði.

Rannsóknaraðferð

Gögnum var safnað með viðtölum við Kristjönu vorin 2021 og 2022 og einnig var stuðst við rannsóknargögn frá fyrri árum. Viðtöl voru tekin við Kristjönu og samstarfsmenn hennar vorin 1997 og 1998 og haustið 2007. Fylgst var með kennslu Kristjönu vorin 1997 og 2000 og haustið 2007. Kristjana hefur safnað gögnum úr kennslu sinni frá 1995 og myndum af lausnum barna. Gögn Kristjönu og fyrri viðtöl nýttust við að rifja upp efni frá þessum árum þegar viðtölin voru tekin 2021 og 2022 til að skrá sögu Kristjönu. Rannsóknarspurningin sem liggur til grundvallar gagnasöfnun og gagnagreiningu er: Hvernig hefur kennari sem tók þátt í rannsóknarverkefnum nýtt sér þekkingu sína til að próa eigin kennsluhætti í stærðfræði og styðja samkennara við kennslu sína?

Viðtalið frá 2021 var marglesað yfir, það kóðað og leitað eftir þeim sem fram komu (Creswell og Poth, 2018). Vorið 2022 var svo tekið annað viðtal til að leita frekari skýringa á því sem fram kom og einnig leitað í gögn frá fyrri árum. Í framhaldi voru þemun endurskoðuð og eftirfarandi fjögur þemu greind: Frumkvöðlastarf með kennurum í Melaskóla, þátttaka í rannsókn um hlutfallaskilning, mótun námsumhverfis í stærðfræði og að styðja nemendur til náms og þroska.

Við ritun textans var beitt frásagnarrýni (e. narrative inquiry) og niðurstöðurnar eru settar fram sem rýnisögur (e. narratives) sem lýsa hvernig Kristjana túlkar þróun stærðfræðikennslu sinnar og samvinnu við nemendur og samkennara (Clandinin og Connelly, 2000). Frásagnarrýni gefur kost á að segja frá hvernig fólk upplifir tilveru sína og setja niðurstöður fram sem sögur þar sem reynslan er endurskrifuð og túlkuð (Clandinin, 2013). Frásagnarrýni hentaði vel til að gefa Kristjönu tækifæri til að segja frá og ígrunda reynslu sína og kennslu.

Stærðfræðináms- og -kennsla sem byggir á hlutdeild og ábyrgð nemenda

Tvö rannsóknarverkefni um stærðfræðináms- og -kennslu sem Kristjönu gafst tækifæri til að kynnast hafa haft mótandi áhrif á stærðfræðikennslu hennar. Þau eru Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna, sem hún kynntist fyrst árið 1995, og Hlutfallaskilningur barna, sem hún tók þátt í vorið 2000. Frá því um 2010 hefur Kristjana tekið þátt í þróunarstarfi um leiðsagnarnám á vegum Skóla- og frístundasviðs Reykjavíkur og kynnst hvernig sú áhersla sem þar er lögð á virka þátttöku nemenda í eigin námi fellur að hugmyndafræði um stærðfræðináms- og -kennslu eins og hún hefur tileinkað sér.

Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna

Bandaríska rannsóknarverkefnið Cognitively Guided Instruction (CGI) fjallar um skilning barna á tölum og reikniadgerðum og stærðfræðikennslu kennara. Leiðandi í verkefninu voru Thomas Carpenter og Elizabeth Fennema. Íslenska þýðingin er Stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna (SKSB) (Carpenter o.fl., 1995, 2015; Jónína Vala Kristinsdóttir, 2004, 2010; Ólöf Björg Steinþórsdóttir o.fl., 2021).

Rannsóknir á talna- og aðgerðaskilningi ungra barna

Við lok tuttugustu aldar voru gerðar viðamiklar rannsóknir við háskólann í Wisconsin í Madison í Bandaríkjunum á hvernig börn á aldrinum fimm til átta ára skilja orðuð dæmi og hvaða leiðir þau fara til að leysa þau án þess að hafa lært tilteknar aðferðir til þess. Lausnir barnanna á einföldum orðadæmum um samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu voru skoðaðar. Kannað var hvernig

börn skilja þrautir af mismunandi gerð og hvernig lausnaleiðir þeirra þróast frá hlutbundinni vinnu yfir í huglæga (Carpenter o.fl., 2015; Carpenter og Moser, 1984; Jónína Vala, 2004).

Fjórir grunnflokkar þrauta í samlagningu og frádrætti voru greindir: Þrautir um sameiningu, aðskilnað, hluta og heild og samanburð. Með því að breyta óþekktu stærðinni í hverjum flokki er hægt að búa til 11 mismunandi gerðir af þrautum. Í þrautum um sameiningu og aðskilnað getur niðurstaða, breyting eða upphaf verið óþekkt. Í þrautum um hluta og heild er ýmist hlutinn eða heildin óþekkt. Þegar um samanburð er að ræða er mismunur, samanburðarmagn eða viðmið óþekkt (Carpenter o.fl., 1995, 2015; Jónína Vala, 2004; Ólöf Björg o.fl., 2021). (Sjá viðauka 1)

Í þrautum um margföldun og deilingu má greina þrjár tegundir. Í margföldunarjöfnunni $a \cdot b = c$ eru þrír liðir, heildarfjöldi (c), fjöldi mengja (a) og fjöldi staka í hverju mengi (b). Ef heildarfjöldinn er óþekktur er um að ræða margföldunardæmi. Ef fjöldi mengja er óþekktur er deilingin mælideiling og ef fjöldi staka í hverju mengi er óþekktur er um skiptingu að ræða (Carpenter o.fl., 2015; Ólöf Björg o.fl., 2021). (Sjá viðauka 2)

Lausnaleiðir barna þróast stig af stigi frá hlutbundnum leiðum þar sem þau fylgja söguþræði þrautar og gera sér líkan með hlutum eða táknum á blaði. Við endurtekna reynslu geta þau farið að beita talningu án þess að gera sér líkan af þrautinni. Þau nefna þá aðra töluna og telja frá henni þar til þau hafa fundið töluna sem leitað er að. Að lokum geta þau nýtt sér staðreyndir um tölur og talnasambönd (talnastaðreyndir) sem þau hafa öðlast þekkingu á við reynslu sína af að leysa þrautir og beitt tengslahugsun (Carpenter o.fl., 1995, 2015; Jónína Vala, 2004). (Sjá viðauka 3)

Þegar börn öðlast reynslu af að leysa þrautir eykst sveigjanleiki þeirra í vali á lausnaleiðum. Það er talsverður munur á því á hvaða aldri börn nota mismunandi lausnaleiðir. Þegar börn byrja í grunnskóla geta þau flest leyst einföld orðadæmi með því að gera sér hlutbundið líkan sem fylgir söguþræði. Mörg börn á þessum aldri geta notað talningaraðferðir og jafnvel talnastaðreyndir. Nemendur sem geta kallað fram talnastaðreyndir, eftir að hafa farið í gegnum stigin þrjú sem sagt er frá hér að framan, hafa dýpri skilning á reikningi en börn sem læra talnastaðreyndir með því að leggja þær á minnið (Carpenter o.fl., 2015).

Meginniðurstöður rannsóknanna á skilningi barna á tölum og reikningi eru þær að ung börn geta leyst einföld orðadæmi og þau nota við það mismunandi leiðir sem byggjast á innsæi þeirra, reynslu og þroska. Á grundvelli niðurstaðnanna voru sett fram viðmið um tegundir þrauta og hvernig leiðir barna við að leysa þær þróast. Þessar niðurstöður nýtast kennurum til að bregðast við hugmyndum nemenda sinna og byggja á þeim við skipulag kennslunnar. Markmiðið er að öllum nemendum séu skapaðar forsendur til að öðlast öflugan skilning á tölum og reikniaðgerðum. (Sjá viðauka 4)

Rannsóknir á þróunarstarfi kennara

Unnið var markvisst að því að kynna kennurum niðurstöður þessara fyrstu rannsókna jafnframt því sem haldið var áfram að rannsaka hvernig skilningur barna á þrautum þróast. Haldin voru námskeið þar sem bæði hugmyndafræðin sem byggt var á við rannsóknirnar og niðurstöður þeirra voru kynntar kennurum. Fylgst var með hluta þeirra kennara sem þátt tóku í námskeiðunum, kannað hvernig þeim gekk að nýta sér þekkingu á lausnaleiðum barnanna og hvernig skilningur þeirra við reikningsnámið þróaðist (Carpenter o.fl., 2015; Fennema o.fl., 1996).

Í ljós kom að þeir kennarar, sem lögðu sig fram við að nýta sér þá þekkingu sem þeir höfðu aflað sér um hugsun barna, breyttu kennslu sinni þegar þeir sáu hvernig þessi þekking nýttist þeim til að skilja hugsun nemenda sinna um reikning. Breytingar gerast þó hægt og námskeiðin voru aðeins byrjunin á ferli þar sem stöðugt var þörf á stuðningi næstu árin. Eitt af því sem virtist vera kennurunum mikilvægt var að geta tekið þátt í umræðum um kennslu sína við aðra kennara sem einnig voru að glíma við hvernig þeir gætu notað þekkingu sína í kennslunni (Fennema o.fl., 1996).

Niðurstöður rannsókna á þróun kennara í starfi sem hafa lagt sig eftir að kynna sér rannsóknir á stærðfræðinámi barna hafa leitt í ljós að kennarar breyti kennsluháttum sínum þegar þeir fara að greina það ferli sem á sér stað í stærðfræðikennslustundum. Greiningin nýtist kennurum til að bregðast við hugmyndum nemenda og byggja á þeim við skipulag kennslu sinnar með það að markmiði að nemendur þeirra öðlist haldgóðan skilning og þekkingu á tölum og reikniadgerðum. Með því að mynda námssamfélag við aðra kennara styrkjast þeir í vinnubrögðum sínum og viðhorfum til stærðfræðináms (Fennema o.fl., 1996; Jacobs o.fl., 2007).

Rannsóknarverkefnið hefur verið kynnt kennaranemum á Íslandi frá árinu 1996 og fyrsta námskeiðið fyrir starfandi kennara um efni þess var haldið sumarið 1995. Kristjana tók þátt í námskeiðinu og hefur síðan þá nýtt sér þá þekkingu sem hún aflaði sér þar til að þróa kennsluhætti sína í stærðfræði (Jónína Vala, 2010). Skólaárið 2020–2021 voru gerðar rannsóknir á talna- og aðgerðaskilningi íslenskra barna á aldrinum 5–8 ára sem byggja á SKSB-rannsóknarverkefninu (Ólöf Björg o.fl., 2021).

Hlutfallshugsun barna og lausnaleyðir

Á miðstigi grunnskóla þurfa nemendur að ná tökum á að skilja hlutföll og beita hlutfallahugsun við lausnaleyðir sínar. Í stærðfræðinámssefni á miðstigi eru þrautir um jafngild hlutföll algengar þar sem ein stærðin er óþekkt. Dæmi um það er þrautin:

Ef fimm geimverur þurfa sjö fæðupillur, hve margar fæðupillur þurfa þá fjörutíu geimverur?

Hlutfallahugsun þroskast hægt og í upphafi geta nemendur eingöngu unnið með einfaldar aðstæður og aðgengileg talnasambönd. Þegar þeir leysa þrautir og vinna með flóknar aðstæður eykst skilningur þeirra á hlutföllum (Lesh o.fl., 1988). Kennarar þurfa að velja markvisst þrautir og þau talnasambönd sem þrautin er byggð á til að stuðla að því að skilningur nemenda þeirra þróist í lausnaferlinu. Staðgóð þekking kennara á hlutfallahugsun nemenda og því hvernig nemendur bregðast við þeim þrautum sem þeir takast á við gerir kennurum kleift að undirbúa kennsluna vel.

Rannsóknir um hlutföll hafa leitt í ljós að ákveðnir eiginleikar talnasambanda hafa áhrif á lausnaleyðir barna. Þrautir sem einfalt er að gera sér líkan af, eins og fimm geimverur og sjö matarpillur (strjál stærð), eru aðgengilegri en þar sem stærðir eru samfelldar, eins og kvörðun, þar sem til dæmis 1 cm táknar 8 km (Lamon, 1993; Langrall og Swafford, 2000). Stærð talna og flókið talnasamband milli hlutfalla í þrautinni hefur einnig áhrif. Í upphafi reynast þrautir þar sem margföldunarsambandið milli tveggja jafngildra hlutfalla er ekki heil tala nemendum sérstaklega erfiðar (Riehl og Steinhorsdóttir, 2019; Steinhorsdóttir og Sriraman, 2007). (Sjá viðauka 5)

Lausnaleyðir nemenda í þrautum um jafngild hlutföll endurspeglar rökhugsunarstig þeirra. Í upphafi átta nemendur sig á að tvær stærðir í hlutfalli eru tengdar og mynda nýja „samfellda einingu“. Til að geta leyst geimveruþrautina á farsælan hátt þurfa nemendur fyrst að skilja að fjöldi geimvera og fjöldi fæðupillna helst í hendur og myndar eins konar nýja „samfellda einingu“, fimm geimverur og sjö fæðupillur, sem vinna þarf með til að leysa þrautina. Nemendur uppgötva að það má byggja upp þessa nýju einingu með endurtekinni samlagningu til að ná því markmiði sem þau vinna að. Ef nemandi hefur ekki skilning á þessari nýju „samfelldu einingu“ má oft sjá handahófskenndar reikniadgerðir framkvæmdar á tölum sem koma fyrir í þrautinni (Kaput og West, 1994; Lobato og Ellis, 2010).

Með auknum þroska og reynslu fara nemendur að nota lausnaleyðir sem byggjast á að skoða margföldunarsambönd jafngildra hlutfalla. Nemendur sem hafa öflugan skilning á hlutföllum og þeim hugtökum sem um þau eru notuð hafa góðan skilning bæði á hlutfallstölu og margföldunarstuðli kvörðunar. Mörgum nemendum hefur reynst erfitt að byggja upp skilning á hlutfallstölu (Riehl og Steinhorsdóttir, 2019; Steinhorsdóttir og Sriraman, 2009). Því er mikilvægt að skapa rými í kennslunni þar sem nemendur fá tækifæri til að skoða og bera saman þessi tvö margföldunarsambönd.

Leiðsagnarnám

Í aðalnámskrá grunnskóla er lögð áhersla á leiðsagnarmat, bæði í almenna hlutanum og kaflanum um stærðfræði. Þar kemur meðal annars fram að við mat á námi skuli leitast við að finna hvað nemandinn getur og að matsverkefni þurfi að setja þannig fram að hann geti sýnt þekkingu sína. Einnig segir að leggja beri áherslu á leiðsagnarmat þar sem nemendur velti reglulega fyrir sér námi sínu með kennurum sínum til að nálgast eigin markmið í náminu (Mennta- og menningarmálaráðuneyti, 2013).

Í námskránni endurspeglast hugmyndir um leiðsagnarmat (e. formative assessment) (Black og Wiliam, 1998) og hafa þær fengið stöðugt meira vægi í umræðu um námsmat á Íslandi. Lengi vel beindist athygli rannsækenda og kennara að leiðum til að meta námsárangur nemenda en hún hefur í auknum mæli beinst að því að það er ekki námsmatið sjálft og framkvæmd þess sem skiptir mestu máli, heldur hvernig niðurstöðurnar eru nýttar til að stuðla að framförum nemenda. Jafnframt þessum viðhorfsbreytingum var farið að nota hugtakið leiðsagnarnám (e. assessment for learning) sem lýsir ferlinu vel (Nanna Kristín Christiansen, 2021).

Áhugi íslenskra kennara á leiðsagnarnámi hefur aukist mikið undanfarin ár. Áherslan á hlutdeild og ábyrgð nemenda á eigin námi samræmist þeirri hugmyndafræði sem byggt er á í rannsóknarverkefnunum um SKSB og hlutfallaskilning. Sameiginlegt í þessum þremur rannsóknarverkefnum er virðingin fyrir hugsun nemenda, þroska þeirra og virkri þátttöku. Kennarar eru hvattir til að ræða við nemendur sína um námið, bregðast við hugmyndum þeirra og byggja á þeim við skipulag kennslu sinnar.

Saga Kristjönu – umræður um stærðfræðihugsun

Við gagnagreininguna kom í ljós hvernig þátttaka í námskeiðum og rannsóknasamstarfi hafði áhrif á þróun Kristjönu sem stærðfræðikennara og samvinnu hennar við samkennara, nemendur og foreldra þeirra. Saga Kristjönu sem stærðfræðikennara er byggð á þeim fjórum þemum sem fram komu við úrvinnslu gagnanna.

Frumkvöðlastarf með kennurum í Melaskóla

Sumarið 1995 tók Kristjana þátt í námskeiði á vegum Flatar, samtaka stærðfræðikennara og Kennaraháskóla Íslands, þar sem kennurum voru kynntar niðurstöður rannsóknarverkefnisins SKSB, sem fjallað var um hér að framan. Frumkvæði að námskeiðinu átti Anna Kristjánsdóttir, prófessor við Kennaraháskólann. Kennari á námskeiðinu var einn af þátttakendum í SKSB-rannsóknarverkefninu, Donald Chambers, sem starfaði við Wisconsin-háskóla í Madison. Kristjana var á þessum tíma að taka aftur til starfa eftir barneignarleyfi og sótti um að fá að taka þátt í námskeiðinu.

Á námskeiðinu voru um 30 kennarar sem flestir kenndu á yngsta stigi grunnskóla. Lögð var áhersla á niðurstöður rannsókna á skilningi barna og að kennarar tengdu niðurstöðurnar við eigin reynslu af að kenna ungum börnum.

... ég var náttúrulega svo heilluð af þessu námskeiði ... út af dóttur minni sem var á þessum aldri, fimm ára. Ég gat alltaf prófað þetta heima á henni, það sem hann var að segja okkur frá. Mér fannst þetta svolítið ótrúlegt, svona er þetta bara í Ameríku, hugsaði ég. Svo fór ég heim og prófaði að leggja svona þrautir fyrir stelpuna mína og hún bara leysti þetta alveg eins.

Þátttaka í námskeiðinu kveikti áhuga Kristjönu á að fylgjast með og greina hvernig stærðfræðiskilningur barna þróast og lagði grunninn að þróunarstarfi hennar í stærðfræðikennslu.

Samvinna kennara

Samkennari Kristjönu, María Sophusdóttir, tók þátt í námskeiðinu og hvatti hún Kristjönu til að óska eftir að fá að kenna byrjendum í grunnskóla um haustið. Um haustið byrjuðu þær María báðar að kenna börnum í fyrsta bekk og fengu hina þrjá kennarana sem kenndu fyrsta bekk í Melaskóla til liðs við sig við að byggja stærðfræðikennsluna á þeirri þekkingu sem þær höfðu öðlast á námskeiðinu.

Síðan vorum við alltaf að bera okkur saman og urðum allar mjög heillaðar af þessu, hvað þetta var, hvað þau voru að vinna, krakkarnir. Leysa þrautir á hlutbundinn hátt og sumir kunnu eitthvað fyrir og gátu nýtt sér það. Okkur fannst bara gaman að fylgjast með þessu. Við vorum alltaf að skoða þessi stig sem þau voru að leysa þetta á. Þetta var mjög skemmtilegt og gaf manni svo mikið.

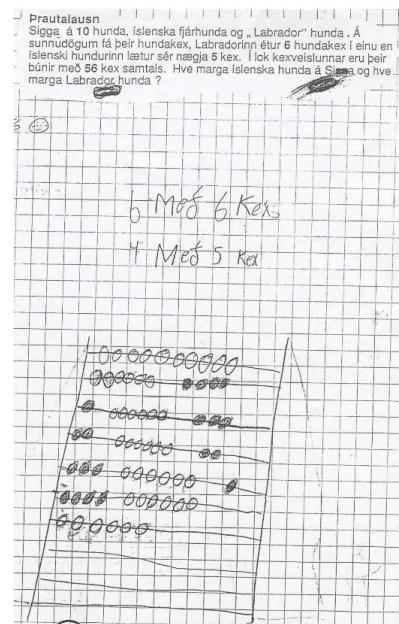
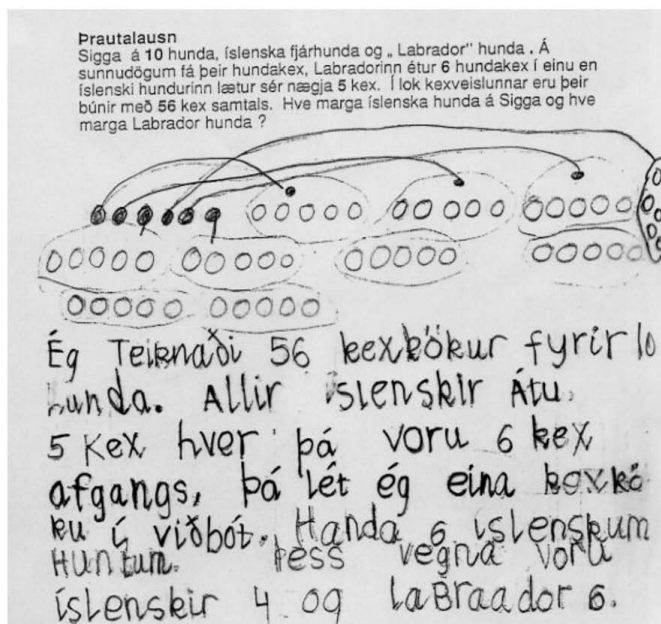
Þær Kristjana og María kynntu samkennurum sínum það lesefni sem þær fengu á námskeiðinu. Á samstarfsfundum kennaranna ræddu þeir stöðugt um hvernig börnin leystu þær þrautir sem þeir lögðu fyrir þau og hvað þeir gætu lært af að hlusta á þau og greina lausnaleyðir þeirra. Sjónarhornið var á hvernig hægt væri að skipuleggja uppbyggilegt námsumhverfi fyrir börnin.

Mér finnst þetta gefa kennslunni algjört gildi, ekki bara að kenna, líka að þróa, þróunarstarf um kennsluna. Læra af börnunum, hvernig þau eru að hugsa. ... Ég var með töflurnar á borðinu hjá mér til þess að átta mig betur á þessu.

Hér vísar Kristjana til yfirlitstaflna sem voru í lesefni námskeiðsins (sjá viðauka 1–4.). Töflurnar reyndust kennurunum gagnlegar við greiningu sína á námi barnanna, hjálpuðu þeim til að átta sig á hvernig lausnaleyðir þeirra þróuðust og hvaða þrautategund væri heppilegt að leggja fyrir hverju sinni. Kristjana og samkennarar hennar áttuðu sig fljótt á því að mikilvægt væri að börnin fengju að glíma við þrautir úr öllum grunnflokkum þrauta sem greindar voru í SKSB-rannsóknunum.

Mynd 2²

Lausnir nemenda í 3. bekk á margföldunarþraut.



Þeir sem skipulögðu námskeiðið sumarið 1995 lögðu áherslu á að kennararnir sem tóku þátt í því fengju tækifæri til að hittast og ræða um kennsluhætti sína. Haldnir voru nokkrir fundir fyrsta veturinn og sumarið 1996. Þar ræddu kennararnir um það sem þeir voru að takast á við í kennslu sinni.

² Myndir 2–9 tók Kristjana Skúladóttir.

Sumarið 1998 héldu Hafdís Guðjónsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir námskeið fyrir kennarana og var fleiri áhugasömum kennurum boðið að vera með. Þær fengu til liðs við sig Ólöfu Björgu Steinþórsdóttur sem þá var að hefja doktorsnám við Wisconsin-háskóla í Madison. Ólöf hafði kynnt sér rannsóknarverkefnið og skoðaði með kennurunum hvernig börn fást við margstafa tölur og hlutföll.

Kristjana og samstarfskonur hennar voru ötular við að þróa kennsluhætti sína í stærðfræði næstu árin og fylgdu þær börnunum sem þær tóku við haustið 1995 í sjö ár. Þær lögðu sig fram um að kynna foreldrum barnanna þau vinnubrögð sem þær viðhöfðu í stærðfræðikennslunni og miðla upplýsingum til þeirra um framfarir barnanna í náminu.

Áhugi Kristjönu á að bæta stærðfræðikennslu sína varð til þess að hún bauð sig fram til að taka þátt í þróunarstarfi um stærðfræðikennslu í skólanum. Sótt var um styrk til Reykjavíkurborgar fyrir skólaárið 1997–1998 til að geta fylgt þróunarstarfinu eftir. Sérfræðingur frá Kennaraháskólanum, Jónína Vala Kristinsdóttir, var fengin til að aðstoða við verkefnið, fylgjast með kennslu kennaranna og taka þátt í samstarfsfundum þeirra.

... og ég býð mig fram til þess að vera í þessari nefnd, á vegum skólans, og lendi þar með miklum reynsluboltum, meðal annarra Ragnheiði Benediktsson ... hún var svo dugleg að halda mér við efnið og fá mig til þess að segja frá og ég var þá að rökræða við hina kennarana.

Þarna fékk Kristjana stuðning reyndari samkennara til að kynna öðrum þá kennsluhætti sem hún var að þróa með samkennurum sínum í fyrsta bekk. Frumkvöðlastarfið í Melaskóla vakti athygli fjölmiðla og birtist viðtal við Kristjönu í Morgunblaðinu í mars 1997 (Sjö ára börn deila og margfalda án þess að þekkja þessi orð, 1997). Hún var líka dugleg að sækja námskeið um stærðfræðikennslu og fékk sérfræðinga í stærðfræðimenntun, frá Kennaraháskólanum og Menntavísindasviði til að halda námskeið fyrir kennara í Melaskóla.

Þörf fyrir áframhaldandi stuðning

Lesefnið sem Kristjana fékk á námskeiðinu sumarið 1995 fjallaði um skilning barna á aldrinum fimm til átta ára á tölum og reikningi og hvernig hann þróast. Þegar nemendur hennar og samkennara hennar voru orðnir átta ára fannst þeim vanta lesefni sem hjálpaði þeim við að skilja hvernig hugsun barna á þessum aldri þróast.

... þetta gekk ágætlega hjá okkur í svona tvö, þrjú ár ... svo fannst okkur við vera alveg stopp. Það var í sambandi við frádrátt. Þá voru þau komin kannski með þrjár talnagrindur, af því að þau voru komin upp í tvö hundruð og eitthvað, voru með tvær, þrjár talnagrindur. Þau voru mjög hlutbundin og þurftu að gera þetta þannig og okkur fannst þetta ganga eitthvað hægt.

Bekkurinn tók á þessum tíma þátt í þróunarverkefni um sorp. Nemendur vigtuðu allan úrgang sem féll til í skólastofunni og báru saman hve mikið féll til á hverjum degi. Þá þurfti oft að draga frá þyngd í grömmum sem gátu verið nokkur hundruð.

Þetta tók svona eitt ár. Þá komust þau yfir á talningarstig og síðan fóru þau að geta notað leiðir sambærilegar og þegar þau voru að leggja saman. Þau fóru ekki í þessar uppsetningar, hefðbundnu, heldur fóru að vinna út frá stærstu tölunni, hundrað eða þúsund og fóru að nota mínustölur. Bara alveg eins og þau væru að leggja saman í samlagningu, en nýttu sér neikvæðar tölur. Þannig að þetta tók bara tíma og það er bara það sem maður þarf að vita.

Samvinna kennaranna og samræður um nám barnanna hjálpuðu þeim til að leysa úr þeim vanda sem þeim fannst þeir standa frammi fyrir á þessum tíma. Sumir samkennarar Kristjönu vildu fara að kenna börnunum að nota hefðbundið reiknirit, setja dæmin upp í dálk og taka til láns.

En við höldum þetta út. Við ræddum þetta, vildum ekki gefast upp því þarna fer þetta að verða svona efi um hvort þessar rannsóknir ... þær sem höfðu ekki verið á þessu námskeiði efuðust um að börnin gætu þróað sín eigin reiknirit við frádráttinn.

Kristjana leggur áherslu á að nemendur ræði saman um lausnaleyðir sínar og kynni þær hver fyrir öðrum. Þannig læri þeir saman og byggja saman upp þekkingu.

Þegar börnin sem Kristjana og samkennarar hennar byrjuðu að kenna haustið 1995 voru komin í 5. bekk bauðst þeim að taka þátt í rannsókn á hlutfallaskilningi barna. Vorið 2000 vann svo Ólöf Björg Steinþórsdóttir að doktorsrannsókn sinni með börnum í 5. bekk í Melaskóla og tveimur kennurum þeirra.

Þátttaka í rannsókn um hlutfallaskilning

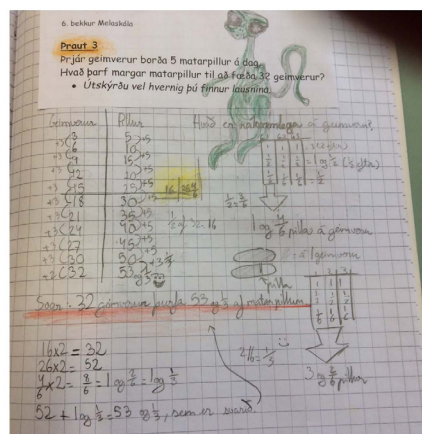
Rannsóknin um hlutfallaskilning barna kom á þeim tíma sem Kristjana og samkennarar hennar voru að leita leiða til að halda áfram með þá vinnu sem þær byrjuðu á haustið 1995. SKSB-efnið hafði styrkt Kristjönu í að skoða lausnaleyðir nemenda sinna og byggja kennsluna á stærðfræðihugsun þeirra en það studdi ekki stærðfræðilegt inntak 5. bekkjar. Í þessari rannsókn var áherslan á að skoða skilning barna á ræðum tölum, sérstaklega á hlutföllum.

En svo þegar við komum í fimmta bekk þá var ekki enn þá komið svo mikið um hvernig nemendurnir myndu þróa áfram. En okkur langaði svo að halda þessu áfram í gangi, gátum ekki hugsað okkur að sleppa hendinni af þessum árgangi af því að okkur langaði svo að sjá hvernig þau myndu þróa áfram.

Kristjana hafði innleitt hugmyndafræði SKSB og byggt upp kennslurými þar sem skapandi hugsun var í fyrirrúmi. Nemendur fengu mörg tækifæri til að leysa þrautir á þann hátt að skilningur þeirra á tölum og reikningi þróaðist. Þeir höfðu einnig fengið mörg tækifæri til að útskýra lausnaleyðir sínar, ræða lausnaleyðir annarra nemenda og ígrunda hvað væri líkt og hvað ólíkt með mismunandi lausnaleyðum. Vinnan með hlutföll byggðist á sömu kennslufræðilegu hugmyndum.

Mynd 3

Dæmi um lausn nemanda í 6. bekk á hlutfallaþraut.



Meðan á rannsókninni stóð voru vikulegir fundir með Kristjönu, einum samkennara hennar og Ólöfu. Í upphafi var fræðsla um ólíkar tegundir þrauta sem beita þarf hlutfallahugsun við að leysa og umræða um mögulegar lausnaleyðir nemenda.

Þarna komu annars konar þrautir sem reyndu á svo marga þætti. Börn sem stækka og fletir sem stækka. Vera alltaf í stanslausu samtali við þig [Ólöfu] og horfa á hvernig krakkarnir unnu, það var bara alveg rosalega gott. Að sjá að þau þroskuðust alveg eins og þegar þau voru lítil, til dæmis þegar þau voru að tileinka sér frádrátt.

Auk fræðslu Ólafar um ólíkar tegundir þrauta var rætt um hvernig lausnaleiðir nemenda breytast þegar stærðfræðilegur skilningur þeirra eykst og styrkist. Kristjana og samkennarar hennar unnu kennsluáætlanir í samvinnu við Ólöfu og voru þrautir valdar með hliðsjón af greiningu þeirra á hvers konar tegund af þraut myndi henta hverju sinni til að styðja stærðfræðilega hugsun nemenda.

Í hverri viku fórum við yfir hvernig krakkarnir leystu verkefnið og vorum að skoða þetta saman ... lærðum hvernig maður býr til þrautirnar. Horfir á krakkana, lausnaleiðirnar, sökkvir sér ofan í það. Ákveður síðan þrautina út frá því hvar þau voru stödd. Hafa einhvern til að tala við, sem er búinn að læra meira en maður sjálfur. Þarna eru börnin orðin eldri, komin með flóknari hugsun.

Mynd 4

Dæmi um lausnir nemenda í 6. bekk á hlutfallaþraut

Left page (Student 1):

Körfuboltaleik skoraði sigurliðið 72 stig. Það voru skoraðar 32 körfur. Hvað voru það margar 3ja stiga körfur og hve margar 2ja stiga körfur?

2. 3ja stiga körfur = 6 stig
 $72 - 6 = 66$ stig eftir

3. 3ja stiga körfur = 18 stig
 $72 - 20 = 52$ stig eftir
 $32 - 6 = 26$ körfur eftir
 $2 \cdot 26 = 52$

Þetta kemur saman og er við prófurnar minn af 3ja stiga körfum

4. 3ja stiga körfur = 15 stig
 $72 - 15 = 57$ stig eftir

5. 3ja stiga körfur = 12 stig
 $72 - 12 = 60$ stig eftir
 $32 - 4 = 28$ körfur eftir
 $2 \cdot 28 = 56$

Þetta gæti ekki hentað, þess vegna er við prófurnar minn af 3ja stiga körfum

Right page (Student 2):

3. Í körfuboltaleik skoraði sigurliðið 72 stig. Það voru skoraðar 32 körfur. Hvað voru það margar 3ja stiga körfur og hve margar 2ja stiga körfur? Mundu að sýna vel hvernig þú hugsar. 2ja stiga 8 3ja stiga

72 stig 32 körfur

70	-2	31	45	-3	19	2	-2	-1
68	-2	30	42	-3	18	0	-2	-0
66	-2	29	39	-3	17			
64	-2	28	36	-3	16			
62	-2	27	33	-3	15			
60	-2	26	30	-3	14			
58	-2	25	27	-3	13			
56	-2	24	24	-3	12			
54	-2	23	21	-3	11			
52	-2	22	18	-3	10			
50	-2	21	15	-3	9			
48	-2	20	12	-3	8			
		19	9	-3	7			
		18	6	-3	6			
		17	3	-3	5			
		16	0	-3	4			
		15		-3	3			
		14		-3	2			
		13		-3	1			
		12		-3	0			
		11		-3				
		10		-3				
		9		-3				
		8		-3				
		7		-3				
		6		-3				
		5		-3				
		4		-3				
		3		-3				
		2		-3				
		1		-3				
		0		-3				

Þrautirnar sem lagðar voru fyrir nemendur til að kalla fram hlutfallahugsun þeirra voru einfaldar en mjög öflugar. Við ákvörðun um erfiðleikastig þrautarinnar var bæði margföldunarsambandið og inntak þrautarinnar skoðað. Það reyndist nemendum mun einfaldara að leysa þrautina um geimverur og fæðupillur en þrautir þar sem þurfti að bera saman vöxt barna eða skoða blöndun efna. Þá reyndust þrautir um einslaga réttthyrninga nemendum mjög erfiðar.

Það var ekki nýtt fyrir Kristjönu að skoða lausnaleiðir nemenda og lesa úr þeim þær vísbendingar sem þær gáfu um stærðfræðiskilning nemendanna. Hún sá sams konar þróun eiga sér stað hjá hjá nemendum sínum þegar þeir leystu þrautir um hlutföll og hún hafði áður séð hjá þeim.

Vorum í námi hjá Ollý [Ólöfu Björgu]. Tengdum við efnið sem við höfðum um þroska yngri barna. Þroskinn er eins, frá hlutbundnu stigi yfir í meira abstrakt hugsun. Að sjá, eftir því hvernig þrautirnar voru, að þau voru að hugsa samkvæmt þessari töflu [SKSB tafla um lausnaleiðir], þó taflan ætti við fimm til sex ára þá var það alveg eins þegar þau voru komin í 5. bekk. Við sáum það svo vel í þessum mismunandi þrautum að sum dattu bara alveg niður í að þau fóru að leggja saman í stað þess að nýta sér margföldunarsambönd. Þetta var orðið það flókið. Meira að segja krakkar sem hefðu ráðið auðveldlega við hluttengdar þrautir, eins og geimveruþrautirnar; þegar þetta var komið út í eins og blöndun málningar þá dattu þau niður í að leggja saman, ekki hugsa þetta sem margföldun.

Fundirnir með Ólöfu gáfu Kristjönu og samkennurum hennar einnig tækifæri til að ræða leiðir til að vinna á fjölbreyttan hátt. Ein hugmynd fólst í að nemendur unnu saman í pörum við að leysa þrautir og skráðu allar teikningar sínar og útreikninga með breiðum tússpenna á stórt spjald. Þegar þeir kynntu lausnleiðir sínar fyrir bekkjarfélögunum gátu allir séð lausnaferlið. Þessi hugmynd hefur reynst Kristjönu vel í gegnum árin og hjálpað nemendum við að skýra hugsun sína.

Það voru líka vinnubrögðin, að ræða saman og skrá á stórt spjald og nota liti. ... Svona pör eru mjög hentug ... vera með sitthvorn litinn og vinna á sameiginlegt spjald og aldrei að stroka út ... ég nýti þetta alltaf þegar þau eru að vinna saman.

Þátttökan í rannsókn á hlutfallaskilningi barna studdi Kristjönu og samkennara hennar við að þróa stærðfræðikennslu sína. Hún var gagnleg viðbót við þróunarstarf þeirra og hafði mótandi áhrif á kennsluhætti þeirra.

Mótun námsumhverfis í stærðfræði

Kennsluhættir Kristjönu hafa þróast í takt við það sem hún hefur kynnt sér um stærðfræðinám barna og hvernig hugsun þeirra um stærðfræði þróast. Þegar hún byrjar að vinna að nýju verkefni með nemendum sínum kallar hún eftir hugmyndum um hvers eðlis verkefnið er og hvernig þeir vilja takast á við það. Nemendur hennar vinna svo saman að því að leysa verkefnið og Kristjana fylgist með vinnu þeirra, sest hjá þeim og ræðir við þá um verkefnið og lausnaferlið. Í verklok segja nemendur frá lausnum sínum og ræða lausnleiðir bekkjarfélaganna.

Við upphaf kennslustundar eða verkefnis

Í upphafi kennslustundar byrjar Kristjana á að ræða verkefni tímans. Ef nemendur eru að halda áfram með verkefni kallar hún eftir upplýsingum um hvar þeir eru staddir og þeir gera grein fyrir hvernig þeir ætla að halda áfram. Oft kemur Kristjana með viðbótarupplýsingar og minnir nemendur á að skrá skipulega lausnaferli sitt. Ef nýtt verkefni er á dagskrá hjálpar hún nemendum að setja það í samhengi við fyrri reynslu sína og þekkingu.

Segjum að við séum að byrja á brotum, þá ræðum við saman fyrst um hvort þau þekki einhver brot og tengsl á milli tugabrota og almennra brota og jafnvel prósentu. ... Ég segi þeim ekki hvernig þau eigi að hugsa eða leysa, þau reyna að leysa en ég legg inn hvaða kröfur ég geri og hvers ég ætlast til af þeim og við ræðum saman áður en þau byrja.

Mynd 5

Sýnishorn af vinnu nemenda í 7. bekk við arkitektaverkefnið.



Þegar byrjað er á verkefnum sem taka langan tíma, þar sem nemendur móta úrvinnslu að miklu leyti sjálfir, ræðir hún um hver tilgangurinn með verkefninu er og leggur línurnar með frágang. Hér segir Kristjana frá vinnubrögðum í tengslum við verkefni sem hún og samkennarar hennar kalla arkitektaverkefnið:

Þá byrja ég á því að fjalla um að þau viti um hvað verkefnið snýst, og við ræðum um vinnuferlið. En ég leyfi þeim alveg að velja sjálf hvers konar hús þau ætli að gera. Í hvaða hlutföllum þau ætla að teikna, sem er svolítið flókið.

Nemendur vita því hvert markmiðið með lausn verkefna er áður en þeir hefjast handa, og hvaða kröfur eru gerðar um frágang og skil, en hafa frelsi um efnistökin.

Nemendur vinna að lausn verkefna

Meðan nemendur vinna að verkefnum fylgist Kristjana vel með þeim og ræðir við þá. Ef hún sér að margir nemendur eiga í vanda með einhvern hluta verkefnisins kallar hún eftir athygli allra og biður einhverja nemendur að segja frá vandanum sem þeir eru að glíma við. Þannig fæst umræða um mikilvæga stærðfræðilega þætti í lausnaferlinu og nemendur geta haldið áfram að leysa verkefnið.

Þegar maður gengur á milli sér maður hvar margir eru að vandræðast. Þá stoppar maður til þess að ræða og þá koma einhverjar hugmyndir, hvernig væri hægt að gera hlutina og af hverju þetta er svona. ... Mér finnst bara svo æðislegt að sjá hvernig þau eru að leysa verkefnið og ég er að kenna enn þá af því að mér finnst þetta svo skemmtilegt. Stærðfræðin og þessi frjóa hugsun þeirra í stærðfræði eða skapandi hugsun.

Þegar unnið er að lausn verkefna telur Kristjana mikilvægt að brjóta kennslustundir upp með þessum hætti þannig að svigrúm gefist til ígrundunar í miðju ferlinu og sjálf nýtur hún þess að taka þátt í því.

Við lok kennslustundar eða verkefnis

Þegar nemendur segja frá lausnum sínum við lok verkefnis velur Kristjana nokkra hóp til að koma upp að töflu til að skrá lausnir sínar og segja frá lausnaferlinu. Hún reynir að velja hóp sem hafa farið ólíkar leiðir við að leysa verkefnið en gætir þess að allir nemendur fái að kynna lausnir sínar að jafnaði einu sinni í viku. Þegar nemendur hafa útskýrt lausnaleiðir sínar spyr hún hvað sé líkt með þeim lausnaleiðum sem hafa verið kynntar, hvað sé ólíkt og hvort einhverjir hafi leyst verkefnið á annan hátt. Þannig fær hún nemendur til að skoða lausnirnar og ræða um þær.

Þegar þau eru búin að útskýra sína leið fæ ég þau til þess að reyna að skoða hinar lausnaleiðirnar. Þá veltum við fyrir okkur hvað er líkt og ólíkt. ... Þannig næ ég stundum að taka alla, ekki á einum degi, en kannski á einni viku eða tveimur.

Kristjana telur þessar kynningar og umræður um lausnaleiðir nemenda ekki síður mikilvægar fyrir hana sjálfa en nemendur. Þær gefa henni tækifæri til að fylgjast með framförum þeirra og veita þeim leiðsögn í námsferlinu.

... mér finnst þetta rosalega gott líka fyrir mig sem kennara til að átta mig á hvar þau standa, það hjálpar mér að greina hvað þarf að leggja áherslu á.

Það er því ekki aðeins nám barnanna sem Kristjana lærir um með því að fylgjast svo náið með þeim, heldur líka hennar eigið nám sem kennari sem nýtir sér þekkingu á námsferli nemenda sinna til að taka ákvörðun um kennslu sína.

Skráning á lausnaleiðum – hlustun

Kristjana hefur lært af reynslunni að þegar börn fá frelsi til að þróa eigin lausnaleiðir við útreikninga þarf að veita þeim góðan stuðning við að skrá ferlið. Meðan börnin eru ung er skráning þeirra oftast myndræn en þróast svo með tímanum yfir í að þau þurfa að nota táknmál stærðfræðinnar. Kristjana

kenndi á yngsta stigi fyrst eftir að hún tók þátt í námskeiðinu um SKSB en hefur síðan eingöngu kennt á miðstigi. Í lesefninu sem hún fékk á námskeiðinu var ekki mikið fjallað um skráningu og var því lítill stuðningur fyrir kennara á miðstigi um það efni. Veturinn sem hún tók þátt í rannsókn um hlutfallaskilning barna var skráning þeirra á lausnum sínum í brennidepli og þá sá Kristjana hve mikilvægt er að veita stuðning við hana.

Ég fór að nýta mér hvernig þau gerðu þetta og hjálpaði við að skrásetja það skipulega. ... Ég hlusta meira á hvernig þau hugsa og hjálpa þeim að skrá það. Ég er að kenna þeim skipuleg vinnubrögð. ... Og þetta sé ég núna hvað kennarar eru ragir við að gera. Maður þarf að hjálpa þeim með skráningu.

Þegar nemendur kynna lausnaferli sitt í lok kennslustundar tekur Kristjana oft að sér skráningu á töflu. Þá sitja nemendur í sætum sínum, segja frá lausnaferlinu og Kristjana skráir. Þá gefst tækifæri til umræðna um skráninguna og hvernig hún getur hjálpað nemendum við að skýra hugsun sína, en nemendur koma líka upp að töflu til að sýna skráningu sína. Í samræðunum um skráninguna læra nemendur að hlusta hver á annan.

Maður reynir að fá þau til að vera sem virkust með því að spyrja út í bekkinn: „Hvaða leið skilur þú best af þeim sem eru komnar á töfluna og af hverju skilurðu hana best?“ Ég segi þeim að þau læri með þessu. Þau þurfa að vita til hvers við erum að þessu. Að það sé nám að ræða um hlutina og geta rökstutt það sem þau eru að segja.

Það tekur nemendur langan tíma að læra virka hlustun og skrá skipulega. Þess vegna leggur Kristjana áherslu á að kenna sama nemendahópnum í nokkur ár.

Þess vegna vil ég hafa þau í þrjú ár, til þess að læra að hlusta, því að það tekur mann hálf til eitt ár. ... Ég er svo sem ekki með neina aðferð við þetta, ég stoppa reglulega og minni þau á að hlusta. Það er náttúrulega ekki hægt að taka þátt í umræðunum nema maður hlusti og þetta tekst alltaf hjá mér.

Sumir nemendur taka ekki þátt í umræðum að fyrri bragði. Þess vegna hefur hún tamið sér að velja nemendur af handahófi þegar hún spyr hvaða leið við skráningu þeir skilja best.

Þá byrja ég kannski á að draga nafn og síðan fá hin að bæta við. En þá vita þau líka að þau þurfa að vera aðeins að þæla í þessu sem við erum að gera.

Kristjana beinir sjónum barnanna að náminu með því að krefja þau um að taka þátt og vera virk í því að fylgjast með samræðum í kennslustofunni. Þannig hjálpar hún öllum nemendum að efla stærðfræðipekkingu sína og taka þátt í að móta námsumhverfið.

Að styðja nemendur til náms og þroska

Kennsluhættir Kristjönu einkennast af leiðsögn, samvinnu við samstarfsfólk og þátttöku í fræðasamfélagi. Hún leggur áherslu á að styðja nemendur sína til þroska og að þróa samstarf við heimili þeirra.

Leiðsagnarnám – leiðsagnarmat

Þegar Kristjana tók þátt í námskeiðum um leiðsagnarmat gerði hún sér grein fyrir að þau vinnubrögð sem hún hafði tamið sér í stærðfræðikennslu féllu að þeim vinnubrögðum og hugmyndafræði sem leiðsagnarmat byggist á.

SKSB er svo tengt leiðsagnarmatinu, að maður horfi á hvernig þau læra. Maður hjálpi þeim til að læra, eins og þau skilja það. Mér finnst þetta svo skylt.

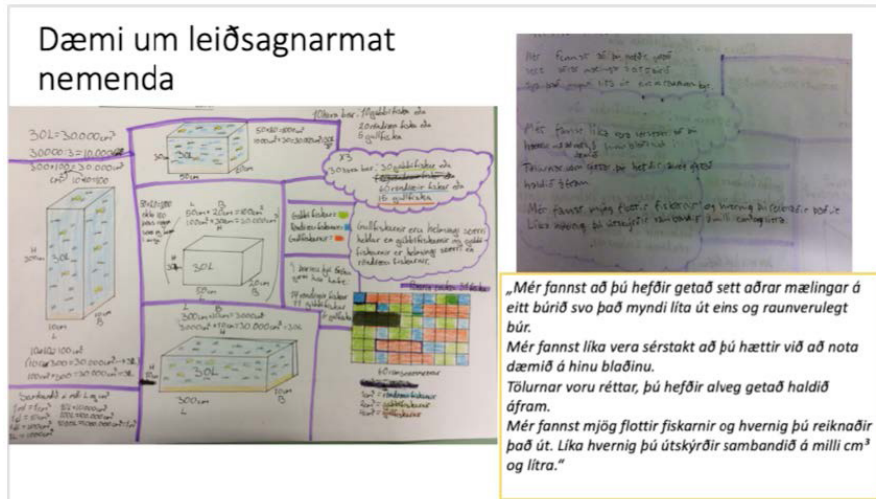
Eins og fram hefur komið í lýsingum hér að framan einkennast vinnubrögð Kristjönu af að nemendur eru virkir í námsferli sínu og þurfa að temja sér að ræða um eigið lausnaferli og samnemenda sinna.

Þannig fá þeir stöðugt endurgjöf á vinnu sína, bæði frá bekkjarfélögum og kennara sem tekur virkan þátt í umræðum og endurgjöf. Með því að fylgjast með því hvernig nemendur leysa verkefni tryggir Kristjana að hún viti hver hæfni þeirra er í stærðfræði.

Ég nota þrautir sem matsverkefni, þau vinna oftast í pörum. ... Þá skoða þau hvort hjá öðru og gera athugasemdir með lit og ég skoða svo aftur og ég skrái með mínum lit. Þá sé ég svo vel hvað þau skilja. ... Ef þau vinna einstaklingslega gerir annaðhvort annar nemandi eða ég athugasemd, hvað er óljóst, hvað má laga, og þau fá tækifæri til að laga.

Mynd 6

Leiðsagnarmat bekkjarfélaga í 7. bekk.



Þegar nemendur hafa tamið sér þessi vinnubrögð verður stærðfræðinámið auðvelt og þeir öðlast trú á sjálfum sér sem námsmönnum.

Og þetta er nákvæmlega sama leið og ég byrjaði ... þau trúðu alltaf að þau gætu gert hlutina. Af því líka að maður stoppaði alltaf til þess að heyra hvernig þau væru að hugsa þegar þau voru komin í gang. Ef maður sér og heyrir að eitthvað gengur ekki stoppar maður og fer í umræður og það hjálpar þeim síðan áfram að heyra hvernig aðrir eru að hugsa eða skilja. Ræða vandamál sem er erfitt. Það fleytir þeim áfram. Þetta er stærðfræðikennsla. Skil ekki hvernig er hægt að kenna stærðfræði án þess að vera með stanslausar umræður.

Nemendur Kristjönu hafa haft orð á því að ekkert verkefni sé of erfitt fyrir þá, þeir þurfi einungis tíma til leysa þau.

Samstarf við heimili nemenda

Þegar Kristjana og samstarfskonur hennar voru að þróa vinnubrögð sín í stærðfræðikennslunni í lok 20. aldar fundu þær fljótt hve mikilvægt var að kynna breyttar áherslur í kennslunni fyrir forráðamönnum nemenda. Kristjana hefur alltaf kynnt vinnubrögð sín í stærðfræðikennslunni sérstaklega vel á kynningarfundum að hausti og stundum haldið sérstaka fundi um stærðfræðikennsluna.

Við héldum foreldrafundi um stærðfræðikennsluna og gerðum það nokkrum sinnum með nokkra árganga sem við vorum með og síðan hef ég alltaf kynnt stærðfræðina alveg sérstaklega vel á hópfundum ... og útskýrt út frá hverju ég er að ganga og sýnt þeim dæmi um mismunandi lausnaleyðir nemenda.

Á foreldradögum, þar sem börn mæta með forráðamönnum sínum, gefur hún líka góðan tíma í umræðu um stærðfræðina. Börnin sýna þá oft verkefni sem þau hafa leyst og þá gefst tækifæri til að ræða ólíkar lausnaleyðir.

Kristjana hefur fengið þakkir frá foreldrum fyrir stærðfræðikennsluna:

... ein sem hafði verið þarna hjá mér í sjö ár, þegar hún útskrifaðist síðan úr framhaldsskólanum sem stúdent og kjólameistari eða eitthvað svoleiðis úr Tækniskólanum. Þá fékk ég langt þakkarbréf frá móðurinni því að hún hafði skarað fram úr í stærðfræðinni og þetta er náttúrulega svo mikil stærðfræði í allri þessari hönnun. ... Móðirin þakkaði mér alfarið fyrir þetta. Gaman að fá bréf svona mörgum árum eftir að maður var að kenna barninu.

Nemendur sem Kristjana hefur hitt eftir að þeir höfðu lokið háskólanámi hafa líka þakkað henni kennsluna:

... ég hitti eina, hún er orðin doktor í einhverjum svona stórum gagnasöfnum ... og hún segir við mig: „Það hvernig þið voruð að kenna stærðfræðina, það bara, þetta hefur hjálpað mér bara alla tíð í gegnum allt mitt nám. Að sjá hlutina á svona fleiri vegu.“ Hún þakkaði fyrir þetta sem hún hafði fengið í Melaskóla, að það hafi bara alla tíð hjálpað henni.

Samstarfið við heimili nemenda hefur greinilega stuðlað að samræðum og meðvitund um þau vinnubrögð sem áhersla var lögð á í stærðfræðikennslunni. Ljóst er að það hefur hjálpað mörgum til að átta sig á mikilvægi rökræðna og skapandi hugsunar í stærðfræðinámi.

Lokaorð Kristjönu um stærðfræðikennslu

Þegar Kristjana rifjar upp stærðfræðikennslu sína síðustu árin er henni efst í huga að hafa átt gott samstarf við þá sem hún vann með og að vera stöðugt að bæta við sig þekkingu um stærðfræðinámið og -kennslu barna.

Mér finnst það að vera saman nokkrir kennarar, þá verður maður óhræddari við að prófa sig áfram. Svo fær maður bara svo mikið út úr þessu. Þess vegna hef ég alltaf viljað vera að kenna ... mér finnst þetta gefa mér alveg ótrúlega mikið, það skemmtilegasta sem ég geri er að kenna stærðfræði. Og að vera í samstarfi við ykkur sem vitið meira og bendið manni á eitthvað til að lesa, og maður fer á námskeið. ... Þetta hjálpar manni rosalega til þess að þróast áfram og gerir mann miklu öruggari í því sem maður er að gera.

En mér finnst bara núna stærðfræðikennsla snúast um umræður. Ég get ekki séð að krakkar læri á því að bara sitja einir úti í horni einhvers staðar og vinna og vinna og hafa engar umræður. Ég bara skil ekki þannig kennslu. ... Við erum alltaf að ræða um hvað þau eru að gera og hvernig þau leysa og hvernig þau hugsa. Mér finnst það bara skipta öllu máli þegar maður er að kenna stærðfræði, þessar umræður um hvernig þau hugsa.

Samantekt

Kristjana hefur verið öflug að þróa stærðfræðikennslu sína í samvinnu við samstarfsfólk sitt og nýtt sér vel þá menntun sem hún hefur aflað sér. Það kemur skýrt fram í frásögnum hennar hvernig hún greinir framfarir nemenda sinna og að niðurstöður þeirra rannsóknarverkefna sem hún hefur kynnt sér hafa nýst henni við að greina skilning nemenda og hugsun um stærðfræði. Hún vísar endurtekið til þess hvernig hún sér að þegar nemendur fá erfiðar þrautir að glíma við þurfa þeir að sjá hlutina fyrir sér og lausnaleyðir þeirra verða hlutbundnar. Með samvinnu, umræðum og sameiginlegri ígrundun færast þeir smám saman yfir á stig óhlutbundinnar hugsunar og geta leyst verkefni með því að nýta sér tengslahugsun (Carpenter o.fl., 1995, 2015; Ólöf Björg o.fl., 2021).

Kristjana og samkennarar hennar hafa í mörg ár unnið með nemendum sínum í 7. bekk að umfangsmiklu verkefni sem þær kalla arkitektaverkefnið. Þá fá þeir fyrirmæli um að hanna byggingu og gera líkan af henni í ákveðnum stærðarhlutföllum. Við það þurfa nemendur að beita hlutfallahugsun (Lobato og Ellis, 2010) og hefur þátttaka í rannsókninni um skilning barna á hlutföllum styrkt Kristjönu í að skipuleggja þessa vinnu og aðstoða nemendur sína við að leysa verkefnið.

Kristjana leggur áherslu á að þau skapandi vinnubrögð og rökræður sem hún hefur beitt í stærðfræðikennslunni hafi yfirfærst á aðra kennslu hennar. Þegar hún kynntist leiðsagnarnámi sá hún líka strax tengslin á milli þeirra vinnubragða sem þar er lögð áhersla á (Nanna Kristín, 2021) og þess sem hún hafði tamið sér í stærðfræðikennslunni. Sú þekking sem Kristjana hefur aflað sér um rannsóknir á stærðfræðinámi barna og kennsluháttum sem stuðla að skapandi hugsun og virku námi nemenda hefur styrkt hana í starfi. Þekking hennar, reynsla og samvinna við samstarfsfólk og fræðasamfélagið er grunnur valdeflingar hennar sem kennara.

Kristjana hefur verið öflugur talsmaður breyttra kennsluhátta í stærðfræði á Íslandi í hátt í þrjá áratugi og verið fyrirmynd í hvernig kennarar geta þróað kennsluhætti sína. Hún hefur stuðlað að samvinnu kennara og með þátttöku í Fleti – samtökum stærðfræðikennara og í ritstjórn mál gagns þeirra, ásamt skrifum í tímaritið (Kristjana Skúladóttir, 2009) hefur hún stutt aðra við að þróa stærðfræðikennslu sína.

Creating learning spaces that foster creative thinking in mathematics: Kristjana Skúladóttir, mathematics teacher

Children's thinking about mathematics and understanding how they learn and engage with mathematics has gained more importance in the teacher education programs and the national curriculum in Iceland. This article provides a case study of the work of one mathematics teacher Kristjana, whose goal was to engage her elementary students (ages 6–13) in mathematics through problem-solving and creative thinking. She has also provided professional development to teachers and has been a valued mentor to many teachers in their journey towards more engaging mathematics teaching. Kristjana is an active member of Flötur, the Association of Mathematics Teachers in Iceland. This article highlights the research Kristjana has been introduced to and how she has used her knowledge about children's thinking to guide her instructional practice and support other teachers. We used narrative inquiry to tell Kristjana's story, using evidence from Kristjana's career, interviews with Kristjana, field notes, and sample work from Kristjana's students. Kristjana's story reveals how her collaborations with mathematics education researchers and colleagues have informed her journey. Through ongoing discussions about the importance of observing children's thinking, Kristjana and her colleagues collaborated to design a learning environment that supports student mathematical thinking. In this chapter, we will highlight three bodies of research that have influenced Kristjana: Cognitively Guided Instruction (CGI), research on student's proportional reasoning, and assessment for learning.

Cognitively Guided Instructions has had a profound impact on Kristjana since she was introduced to it in the early 1990s. Around that time, Dr Thomas Carpenter and Dr Elizabeth Fennema introduced CGI to the mathematics education community. The premise of CGI is that children have informal knowledge of mathematics, which should be the base of their formal learning in primary school mathematics. Specifically, CGI investigated the informal knowledge children used to solve simple word problems based on whole number operations prior to being taught how to solve them. Based on the student strategy analysis, they developed a framework for different problem types for addition, subtraction, multiplication, and division problems and showed that students' intuitive strategies developed from direct modeling to more abstract strategies as they formalised their knowledge of the four operations and their understanding of base-ten

concepts. In practice, understanding children's thinking is essential to design learning environments that put the child in the forefront and where children's learning is based on their way of knowing.

After being introduced to CGI, Kristjana participated in the Making Meaning of Proportion project, which was grounded within the ideas of CGI that students generate strategies based on what they know. This classroom-based research project explored the development of students' understanding of proportion. The big idea underlying proportion is two multiplicative relationships: the ratio of one quantity to another and the ratio of a scaled version of the quantities to the original version. The premise of the project was to create a learning environment where students' thinking was center stage as they engaged with these essential ideas of proportion through solving problems. The project showed that the strategies students generate to solve missing value proportion problems were primarily based on the number of relationships in a problem, as well as the problem context and students' understanding of proportion. Two broad levels of correct strategies for missing value problems were identified: build-up strategies at different efficiency levels and multiplicative strategies. During instruction, the specific numbers used in problems could be manipulated to engage students with the two multiplicative relationships in a proportion. Kristjana's participation as one of the teachers in the project expanded her knowledge of CGI and gave her the understanding to apply the CGI approach to the more complex mathematical domain of proportional reasoning.

Instructional practices based on assessment for learning was the third large body of work that influenced Kristjana's teaching. Instead of using assessment to measure student performance, formative assessment uses assessment tools that promote student progress. The national curriculum in Iceland emphasizes formative assessment and assessment for learning. In the same spirit, it states that teachers should strive to find out what students know, and assessments should be designed in such a way that students can demonstrate their understanding. Students should reflect on their own learning to help them reach their own learning goals. The focus of formative assessment is on the students, using assessment to provide feedback to students and to support them to become responsible for their own learning. Kristjana's beliefs and teaching practices harmonize with the ideas of CGI, proportional reasoning, and assessment for learning. Using children's thinking and assessment supports teachers in talking with their students about the problems responding to their ideas, and building on them when planning their lessons

Keywords: Mathematics learning, assessment for learning, learning spaces, elementary-school teaching.

Um höfunda

Jónína Vala Kristinsdóttir (joninav@hi.is) er fyrrverandi dósent í stærðfræðimenntun við Deild kennslu- og menntunarfræði við Menntavísindasvið Háskóla Íslands. Hún lauk bakkalárprófi frá Kennaraháskóla Íslands 1975, meistaraþrófi frá sömu stofnun árið 2003, doktorsprófi frá Háskóla Íslands árið 2016 og prófi í uppeldisfræði frá Uppsalaháskóla 1983. Hún var bekkjarkennari og æfingakennari við Æfingaskóla Kennaraháskóla Íslands í 20 ár. Jónína hefur skrifað námsefni í stærðfræði fyrir miðstig grunnskóla, unnið að námskrárgerð í stærðfræði og kennt á fjölmörgum námskeiðum fyrir kennara auk kennslu í grunn- og framhaldsnámi kennara um stærðfræðimenntun. Rannsóknarsvið hennar tengist stærðfræðinámi og -kennslu í skóla fyrir alla, starfstengdri sjálfsrýni og samvinnurannsóknnum með kennurum.

Ólöf Björg Steinþórsdóttir (olly.steintho@uni.edu) er dósent í stærðfræðimenntun við stærðfræðideild Háskóla Norður-Iowa í Bandaríkjunum. Hún lauk bakkalárprófi

frá Kennaraháskóla Íslands 1986, meistaraþrófi frá Wisconsin-háskóla í Madison í Bandaríkjunum árið 1997 og doktorsþrófi frá sömu stofnun árið 2003. Hún var stærðfræðikennari í unglingadeild í 10 ár. Rannsóknarsvið hennar tengist stærðfræðinámi og -kennslu með áherslu á stærðfræðihugsun barna. Ólöf rannsakar sérstaklega talna- og aðgerðaskilning barna, skilning barna á hlutföllum og kennsluháttum sem skapa rými fyrir öflugra stærðfræðiumræðu. Hún hefur birt greinar um stærðfræðihugsun barna og hannað og kennt fjölmörg námskeið um hlutfallahugsun barna og um stærðfræðikennslu byggða á skilningi barna (SKSB). Ólöf kennir námskeið í grunn- og framhaldsnámi kennara um stærðfræði og stærðfræðimenntun.

About the authors

Jónína Vala Kristinsdóttir (joninav@hi.is) is a former Associate Professor of Mathematics Education at University of Iceland, School of Education. She completed a bachelor's degree 1975 and a master's degree in education from the Iceland University of Education. She completed a bachelor's degree in pedagogy from the University of Uppsala in 1983 and her PhD degree from the University of Iceland in 2016. Jónína worked for twenty years as a general classroom teacher in primary school. Teaching is her primary profession and she has been active in curriculum planning and writing for primary schools in mathematics. She taught undergraduate and graduate courses in mathematics education. Her research interests are in mathematics learning and teaching in diverse classrooms, developmental research with teachers, and a self-study of teacher education practices.

Ólöf Björg Steinþórsdóttir (olly.steintho@uni.edu) is an Associate Professor of Mathematics Education at the University of Northern Iowa, Department of Mathematics, in the United States. She completed a bachelor's degree from the Iceland Teachers College in 1986, a master's degree from the University of Wisconsin in Madison, USA, in 1997 and a PhD degree from the same institution in 2003. She was a mathematics teacher in Grades 8 - 10 (ages 13–16) for 10 years before pursuing her graduate degree. Her research interests are in mathematics learning and teaching with an emphasis on children's mathematical thinking. Ólöf specifically studies children's understanding of numbers and operations, children's understanding of ratio and proportion and teaching practices that create space for rich mathematical discussion. She has published articles on children's mathematical thinking and designed and taught numerous professional development courses on children's proportional reasoning and Cognitively Guided Instructions (CGI). Ólöf teaches courses on mathematics education in undergraduate and graduate programs.

Heimildir

- Black, P. og Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education*, 5(1), 7–74. <https://doi.org/10.1080/0969595980050102>
- Carpenter, T. P., Fennema, E. og Franke, M. L. (1995). *Children's thinking about whole numbers*. University of Wisconsin-Madison; Wisconsin Centre for Education Research.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. og Empson, S. B. (2015). *Children's mathematics: Cognitively guided instruction* (2. útgáfa). Heinemann.
- Carpenter, T. P. og Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(3), 179–202. <https://doi.org/10.2307/748348>
- Clandinin, D. J. (2013). *Engaging in narrative inquiry*. Left Coast Press.
- Clandinin, D. J. og Connelly, F. M. (2000). *Narrative inquiry: Experience and story in qualitative research*. Jossey-Bass.

- Creswell, J. W. og Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry & research design: Choosing among five approaches* (4. útgáfa). SAGE.
- Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M. L., Levi, L., Jacobs, V. R. og Empson, S. B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 403–434. <https://doi.org/10.2307/749875>
- Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T., Levi, L. og Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 258–288. <https://www.jstor.org/stable/30034868>
- Jónína Vala Kristinsdóttir. (2004). Öll börn geta lært að reikna. *Glæður*, 14(1), 4–10.
- Jónína Vala Kristinsdóttir. (2010). Samfélag kennara sem hvetur til ígrundunar um nám barna: Rannsókn á þróun stærðfræðikennslu á miðstigi grunnskóla. *Ráðstefnurit Netlu – Menntakvika 2010*. <https://netla.hi.is/serrit/2010/menntakvika2010/018.pdf>
- Kaput, J. J. og West, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns. Í G. Harel og J. Confrey (ritstjórar), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (bls. 245–287). State University of New York Press.
- Kristjana Skúladóttir. (2009). Gaman, gaman – samvinna kennara og breyttir kennsluhættir. *Flatarmál*, 16(2), 36–38. http://gamli.ki.is/flotur/images/faggreinafelog/flotur/Skrar/Flatarmal/Flatarmal_2009_2tbl.pdf
- Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(1), 41–61. <https://doi.org/10.2307/749385>
- Langrall, C. W. og Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6(4), 254–261. <https://doi.org/10.5951/MTMS.6.4.0254>
- Lesh, R., Post, T. og Behr, M. (1988). Proportional reasoning. Í M. Behr og J. Hiebert (ritstjórar), *Number concepts and operations in the middle grades* (2. bindi, bls. 493–118). National Council of Teachers of Mathematics.
- Lobato, J. og Ellis, A. B. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6–8*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Mennta- og menningarmálaráðuneyti. (2013). *Aðalnámskrá grunnskóla: Almennur hluti 2011: Greinasvið 2013*. <https://www.stjornarradid.is/library/01--Frettatengt---myndir-og-skrar/MRN/Adalsnamskra-grunnskola-3-utg-19012023.pdf>
- Nanna Kristín Christiansen. (2021). Leiðsagnarnám. Hvers vegna, hvernig, hvað? *Skólaþræðir – Tímarit Samtaka áhugafólks um skólaþróun*. <https://skolathraedir.is/2021/04/20/leidsagnarnam-hvers-vegna-hvernig-hvad/>
- Ólöf Björg Steinþórsdóttir, Guðbjörg Pálsdóttir og Jónína Vala Kristinsdóttir. (2021). „Ég leysi stundum vandamálið með svona hringjum“: Hugsun barna um margföldun. *Skólaþræðir – Tímarit Samtaka áhugafólks um skólaþróun*. <https://skolathraedir.is/2021/04/21/eg-leysi-stundum-vandamalid-med-svona-hringjum-hugsun-barna-um-margfoldun>
- Riehl, S. M. og Steinhorsdóttir, O. B. (2019). Missing value proportion problems: The effects of number structure characteristics. *Investigations in Mathematics Learning*, 11(1), 56–68. <https://doi.org/10.1080/19477503.2017.1375361>
- Sjö ára börn deila og margfalda án þess að þekkja þessi orð. (1997, 4. mars). *Morgunblaðið* [viðtal], bls. 30. <https://timarit.is/page/1873931#page/n29/mode/2up>
- Steinhorsdóttir, O. B. og Sriraman, B. (2007). Gender and strategy use in proportional situations: An Icelandic study. *Nordisk Matematik Didaktikk*, 12(3), 25–56. https://ncm.gu.se/wp-content/uploads/2020/06/12_3_025056_steinhorsdottir.pdf
- Steinhorsdóttir, O. B. og Sriraman, B. (2009). Icelandic 5th grade girls' developmental trajectories in proportional reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, 21(1), 6–30. <https://doi.org/10.1007/BF03217536>

Viðaukar

Viðauki 1

Þrautategundir tengdar reikniðgerðunum samlagningu og frádrætti

Þrautir með augljósri atburðarás sem sett er fram í tímaröð			
Sameining	Niðurstaða óþekkt Íðunn á 7 blöðrur. Torfi gefur henni 4 blöðrur í viðbót. Hvað á Íðunn margar blöðrur núna?	Breyting óþekkt Íðunn á 7 blöðrur. Hve margar blöðrur þarf hún að eignast til viðbótar til að eiga 11 blöðrur?	Upphaf óþekkt Íðunn á nokkrar blöðrur. Torfi gefur henni 4 blöðrur. Nú á hún 11 blöðrur. Hve margar blöðrur átti Íðunn í upphafi?
Aðskilnaður	Niðurstaða óþekkt Íðunn á 11 blöðrur. Hún gefur Torfa 4 blöðrur. Hve margar blöðrur á hún núna?	Breyting óþekkt Íðunn á 11 blöðrur. Hún gefur Torfa nokkrar. Nú á hún 7 blöðrur eftir. Hve margar blöðrur gaf hún Torfa?	Upphaf óþekkt Íðunn á blöðrur. Hún gefur Torfa 4 blöðrur. Núna á hún 7 blöðrur eftir. Hve margar blöðrur átti Íðunn í upphafi?
Þrautir án atburðarásar			
Hluti-hluti-heild	Heild óþekkt Íðunn á 4 grænar blöðrur og 7 gular blöðrur. Hve margar blöðrur á hún samtals?	Hluti óþekktur Íðunn á 11 blöðrur. Hún á 4 grænar blöðrur en hinar eru gular. Hve margar eru gulu blöðrurnar?	
Samanburður	Mismunur óþekktur Íðunn á 11 blöðrur. Torfi á 4 blöðrur. Hvað á Íðunn margar fleiri blöðrur en Torfi?	Samanburðarmagn óþekkt Torfi á 4 blöðrur. Íðunn á 7 fleiri blöðrur en Torfi. Hvað á Íðunn margar blöðrur?	Viðmið óþekkt Íðunn á 11 blöðrur. Hún á 7 fleiri blöðrur en Torfi. Hve margar blöðrur á Torfi?

(Carpenter o.fl., 2015)

Viðauki 2

Þrautategundir tengdar reikniðgerðunum margföldun og deilingu

Þrautategund	Fjöldi hópa	Fjöldi í hópi	Heildarfjöldi
Margföldun Rúnar setur egg í 4 bakka. Hann setur 6 egg í hvern bakka. Hve mörg egg setur Rúnar í alla bakkana?	4	6	óþekktur
Deiling – skipting Rúnar setur 24 egg í bakka. Hann skiptir þeim jafnt í 4 bakka. Hve mörg egg setur hann þá í hvern bakka?	4	óþekktur	24
Deiling – mælideiling Rúnar setur 24 egg í bakka. Hann setur 6 egg í hvern bakka. Hve marga bakka getur hann fyllt?	óþekktur	6	24

(Carpenter o.fl., 2015)

Viðauki 3

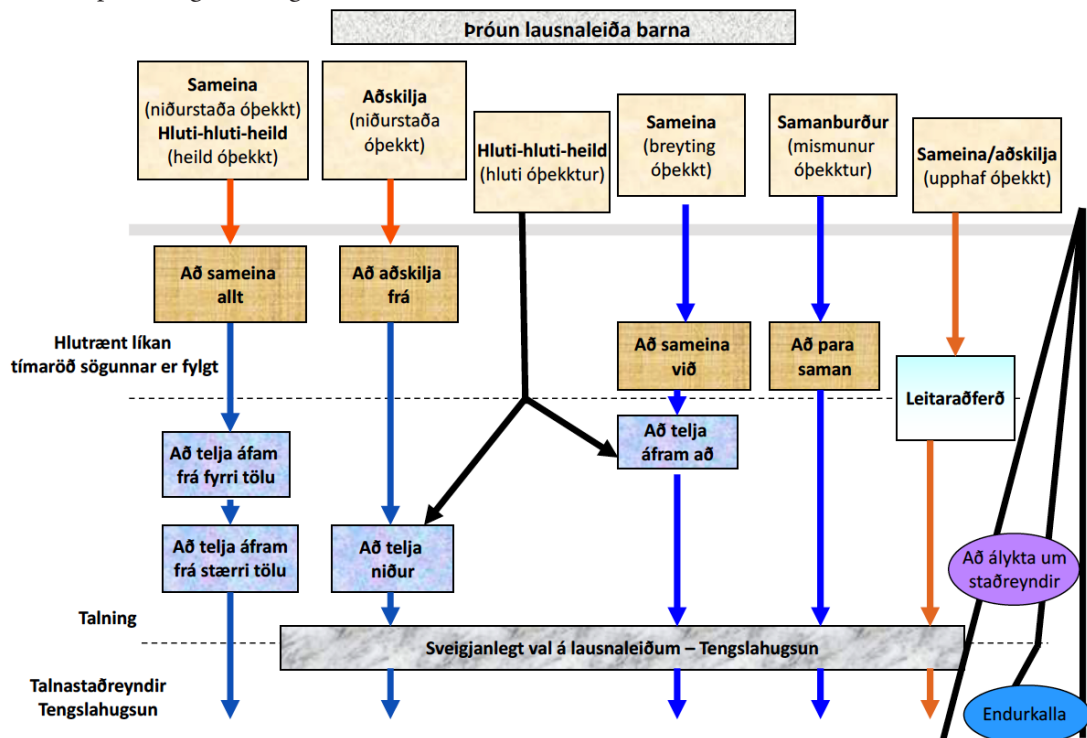
Próun lausnaleiða barna

Stig 1: Hlutbundið líkan sem fylgir söguþræði	Börnin búa sér til líkan sem fylgir söguþræðinum í þrautinni og nota til þess hluti, fingur eða skýringarmyndir. Einkenni þessarar lausnaleiðar er að öll stökin sem koma fyrir í þrautinni eru sýnileg og við gerð líkansins helst söguþráðurinn óbreyttur. Börnin telja stökin sem koma fyrir í hverjum lið sögunnar og telja svo heildina, eða það sem vantaði/ var tekið af, allt eftir því hvað var óþekkt í þrautinni.
Stig 2: Talning	Næsta stig er að telja án þess að gera sér líkan en börnin halda sig þó enn við söguþráð þrautarinnar. Í þrautum um sameiningu og aðskilnað byrja þau á að telja frá fyrri tölunni sem kemur fyrir í þrautinni og nota oft fingur til að hjálpa sér að halda utan um hve langt þau eru komin í talningunni. Í þrautum um margföldun og deilingu finna þau heildarfjöldann með því að telja á þeim tölum sem fjöldinn í hverju mengi segir til um. Á þessu stigi er börn líka oft farin að skrá hjá sér tölur til að hjálpa sér að halda utan um talningu sína. Dæmi um það er að telja á fjórum og skrá: „4, 8, 12, 16“. Við talningu eru öll mengi og stök óbreytt og samkvæmt söguþræðinum en börnin þurfa ekki lengur að sjá fjöldann fyrir sér á hlutbundinn hátt.
Stig 3: Tengslahugsun og notkun talnastaðreynda	Þegar börn eru komin á þetta stig geta þau unnið með tölur á sveigjanlegan hátt. Þau geta líka nýtt sér ýmsar staðreyndir um tölur og talnasambönd sem þau þekkja til að leysa þrautir. Börn læra sumar samsetningar talna á undan öðrum og notfæra sér þær til að draga ályktanir um lausnir á þrautum þar sem aðrar samsetningar talna koma fyrir. Dæmi um það er að nota tvöföldun við samlagningu (t.d. ég veit að 2 og 2 eru 4, þá get ég fundið hvað 2 og 3 eru, bæti 1 við 4 og fæ 5) og plúsheiti tölunnar 10 (t.d. ég veit að $7+3=10$ þá er, $7+4=7+3+1=11$). Í margföldun nýta þau sér þekkingu á faldheitum til að finna önnur. Dæmi: $2 \cdot 6=12$, þá veit ég að er $4 \cdot 6=12+12=24$. Börn álykta út frá staðreyndum áður en þau hafa náð tókum á að nota allar talnastaðreyndir sem þau muna og án þess að þeim hafi verið kenndar leiðir til þess. Söguþráðurinn er ekki lengur augljós í lausnaleiðum barna á þessu stigi.

(Carpenter o.fl., 2015)

Viðauki 4

Yfirlit um þrautategundir og lausnaleiðir barna



(Carpenter o.fl., 2015, bls. 41)

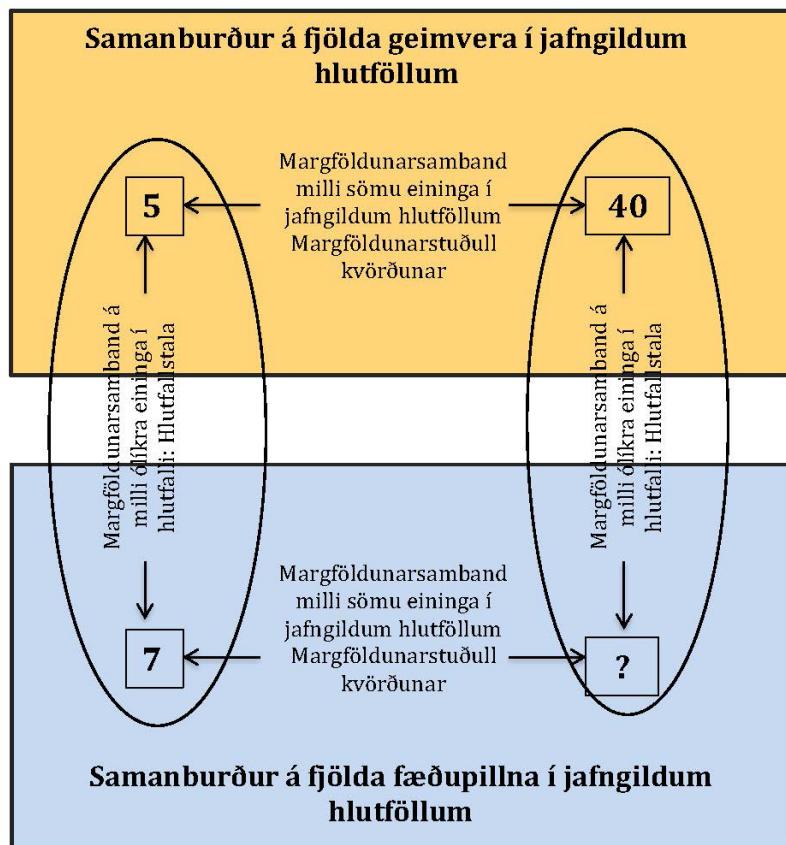
Viðauki 5

Jafngild hlutföll

Tvö hlutföll eru jafngild þegar margföldunarsamband tveggja eininga í hlutfallinu helst óbreytt (hlutfallstalan) og báðar stærðir í hlutfallinu breytast á sama hátt. Kvörðunin á báðum einingum er með sama margföldunarstuðli (Lobato og Ellis, 2010).

Í þrautinni um geimverurnar og fæðupillurnar eru tvær einingar, fjöldi geimvera og fjöldi fæðupilla $\frac{5 \text{ geimverur}}{7 \text{ fæðupillur}} = \frac{40 \text{ geimverur}}{x \text{ fæðupillur}}$. Margföldunarsamband tveggja eininga í hlutfalli, eða hlutfallstalan, er margföldunarsambandið milli fjölda geimvera og fjölda fæðupilla. Við getum sagt að fjöldi geimvera sé 1,4 (eða $\frac{7}{5}$) sinnum fleiri en fjöldi fæðupilla eða fjöldi fæðupilla sé $\frac{5}{7}$ af fjölda geimvera. Einnig er hægt að auðkenna hlutfallstöluna með því að skoða stofnhlutföllin (e. unit rate/ratio), það er hlutfallið ein geimvera fyrir 1,4 (eða $\frac{7}{5}$) fæðupillu, einnig skráð sem hlutfallið $1:\frac{7}{5}$ eða hlutfallið fyrir $\frac{5}{7}$ geimveru er ein fæðupilla, eða hlutfallið $\frac{5}{7}:1$.

Margföldunarsambandið milli sömu eininga í jafngildum hlutföllum er þegar fjöldi geimvera er borinn saman við fjölda geimvera í öðru jafngildu hlutfalli, það er margföldunarstuðull kvörðunar. Við getum sagt að kvörðunin sé áttföld, eða að það eru 8 sinnum fleiri geimverur í samanburðarhlutfallinu og þar með eru einnig átta sinnum fleiri fæðupillur.



Jónína Vala Kristinsdóttir og Ólöf Björg Steinþórsdóttir (2023).

Að móta starfsumhverfi í stærðfræði þar sem skapandi hugsun er í fyrirrúmi: Kristjana Skúladóttir stærðfræðikennari

Netla – Vef tímarit um uppeldi og menntun: Sérít 2023 – Þau skiptu máli: Sögur grunnskólakennara

Sótt af http://netla.hi.is/serrit/2023/sogur_grunnskolakennara/07.pdf

DOI: <https://doi.org/10.24270/serritnetla.2023.5>